CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1977

•

CONCOURS SCIENCES

MATHEMATIQUES (Epreuve A)

Durée : 4 heures

Samedi 7 mai 1977 de 8 heures à 12 heures

•

N.B. - La partie I sert à établir des résultats utilisables dans II ou III. Les parties II et III sont indépendantes.

On notera $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes. On pourra admettre les résultats suivants :

— pour $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$ on a $0 \leqslant t \leqslant \operatorname{tg} t$

— si Σu_n est une série absolument convergente, on notera $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ sa somme à partir du rang n_0. On a alors $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$. Soit f l'application de $[0, \pi]$ vers $\mathbb{R}$ définie comme suit : $f(t) = \frac{t \sin t}{1 - \cos t}$ pour $0 < t \leqslant \pi$, $f(t) = 2$ pour $t = 0$. f est continue sur $[0, \pi]$ on pose : $A = \int_0^{\pi} f(t)\, dt$. Le but du problème est de calculer A de deux manières différentes dans II et III.

I

1. a) Vérifier que f est continue sur $[0, \pi]$.

b) Etudier sur $[0, \pi]$ les variations de la fonction u :

$$u : t \to u(t) = t \sin t - 2(1 - \cos t)$$

En déduire que :

$$0 \leqslant f(t) \leqslant 2 .$$

2. a) Montrer que $H(a) = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 - a \cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$ pour $0 \leqslant a < 1$

En déduire l'intégrale

$$J(x) = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + x^2 - 2x \cos t}$$

où $0 \leqslant x < 1$

b) On pose $K(x) = \int_0^{\pi} \frac{t \sin t\, dt}{(1 - x \cos t)^2}$ avec $0 \leqslant x < 1$.

Calculer $K(x)$ en utilisant une intégration par parties.

.../...

3. a) Déterminer une primitive de la fonction $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ pour $0 < x < 1$.

b) Déterminer au voisinage de 0 le développement limité d'ordre 2 des fonctions :

$$u_1(x) = \operatorname{Log}(1+\sqrt{1-x^2})$$

$$u_2(x) = \operatorname{Log}(1-\sqrt{1-x^2}) - 2\operatorname{Log} x$$

II

On pose pour $0 \leqslant x < 1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad h(t,x) = \dfrac{x \sin t}{x^2 - 2x\cos t + 1}$

1. a) Du développement en série entière de $\dfrac{1}{1-z}$ $(z \in \mathbb{C}, |z| < 1)$ déduire l'égalité :

$h(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin nt$.

b) Démontrer l'inégalité : (1) $\left| h(t,x) - \sum_{p=1}^{n} x^p \sin pt \right| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$

2. On pose :

$$g(x) = \int_0^{\pi} t\, h(t,x)\, dt \qquad 0 \leqslant x < 1 .$$

a) Démontrer l'inégalité : (2) $\left| g(x) - \dfrac{A}{2} \right| \leqslant (1-x)^2 J(x)$ (J a été définie dans I. 2.). En déduire $\lim_{x \to 1} g(x)$.

b) Démontrer l'inégalité : (3) $\left| g(x) - \sum_{p=1}^{n} \int_0^{\pi} x^p\, t \sin pt\, dt \right| \leqslant \dfrac{\pi^2}{2} \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

3. Calculer $\int_0^{\pi} t \sin nt\, dt$, en déduire en utilisant 2. b) que $g(x) = \pi \operatorname{Log}(1+x)$ puis la valeur de A.

III

On pose $\varphi(x) = \int_0^{\pi} \dfrac{t \sin t\, dt}{1 - x\cos t}$, $\psi(x) = \int_0^{\pi} \dfrac{t \sin t \cos t\, dt}{(1 - x\cos t)^2}$; $0 \leqslant x < 1$.

1. Calculer $\varphi(0)$ puis démontrer les inégalités :

$$(4) \quad \left| \varphi(x) - A \right| \leqslant 2(1-x) \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 - x\cos t}$$

$$(5) \quad \left| \varphi(x) - \varphi(0) \right| \leqslant \frac{\pi x}{1-x}$$

En déduire :

$\lim_{x \to 1} \varphi(x)$ et $\lim_{x \to 0} \varphi(x)$

2. On pose $B(x) = \iint_{\Delta(x)} \dfrac{t \sin t \cos t}{(1 - u\cos t)^2}\, dt\, du$ où $\Delta(x)$ est le domaine plan

$$0 \leqslant t \leqslant \pi, \qquad 0 \leqslant u \leqslant x \qquad \text{avec } 0 \leqslant x < 1$$

Montrer que $B(x)$ existe et que l'on a $B(x) = \int_0^x \psi(u)\, du = \varphi(x) - \varphi(0)$.

3. a) Déduire du 2. que pour $0 < x < 1$, φ vérifie l'équation différentielle.

$$(6) \quad xy' + y = K(x) \qquad (K \text{ a été définie dans I. 2.}).$$

b) Intégrer l'équation différentielle (6), en déduire φ puis la valeur de A.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail